

B. A. EXAMINATION, 2022

(Fifth Semester)

(Main/Re-appear)

MATHEMATICS

BM352

Groups and Rings

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 27

Note : Attempt *Five* questions in all. All questions carry equal marks.

कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

Unit I

इकाई I

1. (a) Show that the set

$G = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$ is an abelian

group with respect to addition. **3**

(2-M22-447) II-M/22/2001513(UG234)(TR)

P.T.O.

दिखाइए कि समुच्चय
 $G = \{a + b\sqrt{2}; a, b \in \mathbb{Q}\}$ योग के सापेक्ष एक
आबेली समूह है ।

(b) A necessary and sufficient condition for a non-empty subset H of a group G to be a subgroup is that $a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$, where b^{-1} is inverse of b in G . **2.4**

किसी समूह G के अरिक्त उपसमुच्चय H के उपसमूह होने के लिए आवश्यक व पर्याप्त शर्त है $a \in H, b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$, जहाँ b^{-1} , G में b का व्युत्क्रम है ।

2. (a) Prove that the order of each subgroup of a finite group is a divisor of the order of the group. **3**

सिद्ध कीजिए कि किसी निश्चित समूह के प्रत्येक उपसमूह की कोटि समूह की कोटि की एक विभाजक होती है ।

(b) Prove that every quotient group of a cyclic group is cyclic. **2.4**

सिद्ध कीजिए कि किसी चक्रीय समूह का प्रत्येक लब्धि समूह चक्रीय होता है ।

Unit II

इकाई II

3. (a) Every homomorphic image of a group G is isomorphic to some quotient group of G . **3**

किसी समूह G की प्रत्येक होमोमॉर्फिक इमेज G के किसी लब्धि समूह के आइसोमॉर्फिक होती है ।

- (b) If $o(\text{Aut } G) > 1$, then show that : **2.4**
 $o(G) > 2$

यदि $o(\text{Aut } G) > 1$, तब दिखाइए कि :
 $o(G) > 2$

4. (a) Let $Z(G)$ be the centre of a group G , if G/Z is cyclic, then prove that G is abelian. **3**

माना $Z(G)$ किसी समूह G का केंद्र है । यदि G/Z चक्रीय है, तो सिद्ध कीजिए कि G आबेली है ।

- (b) Write $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ as the product of disjoint cycles. **2.4**

$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ को डिसजॉइंट साइकल्स के गुणन के रूप में लिखिए ।

Unit III

इकाई III

5. (a) Every field is an integral domain. **3**
प्रत्येक क्षेत्र एक समाकल क्षेत्र होता है ।

- (b) The intersection of two subrings is a ring. **2.4**

दो उपवलयों का प्रतिच्छेदन एक वलय होता है ।

6. (a) The ring of integers is a principal ideal ring. **3**

पूर्णाकों का वलय मुख्य आइडियल वलय होता है ।

- (b) Let $f: R \rightarrow R'$ be a ring homomorphism. Let S be an ideal of R . Then $f(S)$ is an ideal of $f(R)$. 2.4

माना $f: R \rightarrow R'$ एक वलय समाकारिता है। माना S, R का एक आइडियल है। तब $f(S), f(R)$ का एक आइडियल है।

Unit IV

इकाई IV

- 7(a) The ring of Gaussian integers is an Euclidean domain (ring). 3
गॉसीय पूर्णांकों का वलय एक यूक्लिडीय क्षेत्र (वलय) होता है।
- (b) An element in a principal ideal domain is prime element iff it is irreducible. 2.4
किर्सा मुख्य आइडियल क्षेत्र में कोई अवयव प्राइम अवयव होता है यदि और केवल यदि यह irreducible है।
- 8 (a) If R is an integral domain, then $R[x]$ is also an integral domain. 3
यदि R कोई समाकल क्षेत्र है, तो $R[x]$ भी एक समाकल क्षेत्र होता है।

P.T.O.

- (b) Every principal ideal domain is a unique factorization domain. 2.4
प्रत्येक मुख्य आइडियल क्षेत्र एक अद्वितीय फैक्टराइजेशन क्षेत्र होता है।

Unit V

इकाई V

9. (a) Show that a group upto order 2 is abelian. 1
दिखाइए कि कोटि 2 तक का एक समूह आबेली होता है। <https://www.cbluonline.com>
- (b) Define a quotient group. 1
लब्धि समूह को परिभाषित कीजिए।
- (c) Define integral domain. 1
समाकल क्षेत्र को परिभाषित कीजिए।
- (d) Show that the ring $Z_5; \{(0, 1, 2, 3, 4), +_5, \times_5\}$ has no proper ideal. 1
दिखाइए कि वलय $Z_5; \{(0, 1, 2, 3, 4), +_5, \times_5\}$ का कोई प्रॉपर आइडियल नहीं होता है।
- (c) State Gauss Lemma. 1.4
गॉस लेमा को लिखिए।

330