S.C.No.- M/21/2001513

B. A. EXAMINATION, 2021

(Main)

(Fifth Semester)

MATHEMATICS

BM-352

Groups and Rings

Time : 3 Hours Maximum Marks : 27

Note : Attempt Five questions in all. All questions carry equal marks.

कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

1. (a) Show that the set of integers Z is an abelian group with respect to binary operation '$*$' defined as $a^*b = a + b + 1$ for $a, b \in z$.

दर्शाइए कि पूर्णांक Z का सेट $a, b \in z$ के लिए $a^*b = a + b +1$ के रूप में परिभाषित बाइनरी ऑपरेशन '$*$' के सापेक्ष आबेलियन समूह है |

(b) Show that the union of two subgroups is a subgroup iff one is contained in the other.

दर्शाइए कि दो उपसमूहों की यूनियन एक उपसमूह है यदि और केवल यदि एक - दूसरे में समाहित है |

2. (a) Prove that a subgroup H of a group G is normal if and only if each left coset of H in G is a right coset of H in G.

सिद्ध कीजिए कि समूह G का एक उपसमूह H सामान्य है यदि और केवल यदि प्रत्येक G में H का बायाँ कोसेट G में H का दायाँ कोसेट होगा ।

(b) If a cyclic subgroup N of G is normal in G, then show that every subgroup of N is normal in G.

यदि G का चक्रीय उपसमूह N, G में सामान्य है, तो दर्शाइए कि H का प्रत्येक उपसमूह G में सामान्य है।

3. (a) If p is a prime number and G is a nonabelian group of order p^3, show that Z(G) has exactly P elements.

यदि p एक अभाज्य संख्या है और G आर्डर p^3 का नॉन-आबेलियन समूह है तो दर्शाइए कि Z(G) में ठीक p तत्व है।

(b) State and prove Cayley theorem.

कैले प्रमेय को सिद्ध कर वर्णन कीजिए ।

4. (a) Find the number of elements in the centre of group $S_{3.}$

समह S_3, के केन्द्र में तत्वों की संख्या ज्ञात कीजिए ।

(b) Show that a characteristic subgroup of a group G is a normal subgroup of G. Is the converse true ?

दर्शाइए कि एक समूह G का अभिलाक्षणिक। उपसमूह G का सामान्य उपसमूह है। क्या कन्वर्स सत्य है ?

5. (a) Prove that if S = $\{a+b\sqrt{2} : a,b \in Q\}$ then (S, +, .) is a field.

सिद्ध कीजिए कि यदि S = $\{a+b\sqrt{2} : a,b \in Q\}$ तो (S, +, .) एक क्षेत्र है।

(b) If in a ring R with unity, $(xy)^2 = x^2y^2$ for all x, y $\in$ R, then show that R is commutative.

यदि सभी x, y $\in$ R के लिए यूनिटी सहित वलय R में $(xy)^2 = x^2y^2$, तो दर्शाइए कि R विनिमेय है ।

6. (a) Prove that centre of a group G is a normal subgroup of G.

सिद्ध कीजिए कि एक समूह G का केंद्र G का सामान्य उपसमूह है।

(b) A ideal S of a commutative ring R with unity is maximal iff R/S is a field. https://www.cbluonline.com

यूनिटी सहित विनिमेय वलय R का एक आइडियल S अधिकतम है यदि और केवल यदि R/S एक क्षेत्र है।

7. (a) Prove that an element a in an Euclideanring R is a unity iff d(a) = d(1).

सिद्ध कीजिए कि एक यूक्लिडियन रिंग R में तत्व a एक इकाई है यदि और केवल यदि d(a) = d(1) ।

(b) Show that every non-zero prime ideal of a principal ideal domain is maximal.

दर्शाइए कि मुख्य आइडियल का प्रत्येक नॉन-जीरो अभाज्य आइडियल क्षेत्र अधिकतम है ।

8. (a) Show that the polynomial $8x^3 - 6x - 1$ is irreducible over Q.

दर्शाइए कि बहुपद $8x^3 - 6x - 1$ के ऊपर अलघुकरणीय है।

(b) Show that if a is an irreducible element of a unique factorization domain R, then a must be prime.

दर्शाइए कि यदि एक यूनिक फैक्टराइजेशन डोमेन R का अलघुकरणीय तत्व a है, तो a अभाज्य होनी चाहिए ।

9. (a) Define Cyclic Group

चक्रीय समूह को परिभाषित कीजिए ।

(b) Define Permutation Group.

क्रम परिवर्तन समूह को परिभाषित कीजिए ।

(c) Prove that every subgroup of an abelian group is always normal.

सिद्ध कीजिए कि आबेलियन समूह का प्रत्येक उपसमूह सदैव सामान्य होता है ।

(d) Define integral doamin with two examples.

समाकलनीय क्षेत्र को दो उदाहरणों सहित परिभाषित कीजिए ।

(e) Define Quotient Ring.

गुणक रिंग को परिभाषित कीजिए ।