

S.C.No.—A/21/2001413

B. A. EXAMINATION, 2021

(Fourth Semester)

MATHEMATICS

BM242

Special Functions and Integral Transforms

Time : 2 Hours

Maximum Marks : 27

Note : Attempt *Four* questions in all. All questions carry equal marks.

कुल चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

## Section I

## खण्ड I

1. (a) Find the power series solution in powers of  $(x - 1)$  of the initial value

(3-67/19)H-A/21/2001413(10SEP06)(TR)

P.T.O.

problem  $x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 2y = 0, y(1) = 1,$

$$\frac{dy}{dx}(at 1) = 2. \quad 3.75$$

प्रारंभिक मान सभस्या  $x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 2y = 0,$

$$y(1) = 1, \frac{dy}{dx}(at 1) = 2 \text{ के } (x - 1) \text{ की घातों}$$

में घात श्रेणी हल ज्ञात कीजिए ।

- (b) Solve :

$$(1 + x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 0$$

in series at  $x = 0. \quad 3$

हल कीजिए :

$$(1 + x^2) \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} - y = 0$$

$x = 0$  पर श्रृंखला में ।

2. (a) Show that :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

where  $n$  is any integer. 3

H-A/21/2001413(10SEP06)(TR) 2

दिखाइए कि :

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

जहाँ  $n$  कोई पूर्णांक है ।

- (b) Find the solution of  $x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \frac{1}{4} y = 0$   
in terms of Bessel's function. 3.75

बेसल फलन के संदर्भ में  $x \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + \frac{1}{4} y = 0$   
का हल ज्ञात कीजिए ।

## Section II

### खण्ड II

3. (a) Show that : 3

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} t^n P_n(x), \quad |x| \leq 1, |t| < 1.$$

दिखाइए कि :

$$(1 - 2xt + t^2)^{-1/2} = \sum_{n=1}^{\infty} t^n P_n(x), \quad |x| \leq 1, |t| < 1.$$

- (b) Prove that :

3.75

$$\int_{-1}^1 P_n(x) (1 - 2tx + t^2)^{-1/2} dx = \frac{2t^n}{2n+1}$$

सिद्ध कीजिए :

$$\int_{-1}^1 P_n(x) (1 - 2tx + t^2)^{-1/2} dx = \frac{2t^n}{2n+1}$$

4. (a) Show that : 3

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$$

दिखाइए कि :

$$H_n''(x) - 2xH_n'(x) + 2nH_n(x) = 0$$

- (b) Show that : 3.75

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2 dx = n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

दिखाइए कि :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} [H_n(x)]^2 dx = n! \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = 2^n n! \sqrt{\pi}.$$

Section III

खण्ड III

5. (a) State and prove second shifting theorem for Laplace transform. 3

लाप्लास रूपान्तरण के लिए द्वितीय शिफ्टिंग प्रमेय को लिखकर सिद्ध कीजिए ।

- (b) Show that : 3.75

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

दिखाइए कि :

$$\int_0^{\infty} \sin x^2 dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

6. (a) Find inverse Laplace transform of

$$\frac{1}{s(s-6)^4} \quad 3$$

$\frac{1}{s(s-6)^4}$  का प्रतिलोम लाप्लास रूपांतरण ज्ञात कीजिए ।

- (b) State and prove convolution theorem for inverse Laplace transform. 3.75

व्युत्क्रम लाप्लास रूपान्तरण के लिए कनवोल्यूशन प्रमेय को लिखिए और सिद्ध कीजिए ।

Section IV

खण्ड IV

7. (a) Find Fourier sine and cosine transform of  $f(x) = x$ . <https://www.cbluonline.com> 3

$f(x) = x$  का फूरियर ज्या और कोज्या रूपांतर ज्ञात कीजिए ।

- (b) Show that : 3.75

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2 + 1} d\lambda = \frac{\pi}{2} e^{-x}, \quad x > 0$$

दिखाइए कि :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \lambda x}{\lambda^2 + 1} d\lambda = \frac{\pi}{2} e^{-x}, \quad x > 0$$

8. (a) Using Parseval's identity, prove that : 3

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

पारसेवल के नाम का प्रयोग करके सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2} = \frac{\pi}{4}.$$

- (b) Find the finite cosine transforms : 3.75

$$f(x) = \sin ax$$

परिमित कोज्या रूपांतरण ज्ञात कीजिए :

$$f(x) = \sin ax$$

### Section V

#### खण्ड V)

9. (a) Write integral representation of  $J_n(x)$ . 1.25

$J_n(x)$  का समाकलन निरूपण लिखिए।

- (b) Define relation between Fourier and Laplace transforms. 1.25

फूरियर और लाप्लास रूपांतरण के बीच संबंध को परिभाषित कीजिए।

- (c) Define  $\int_0^1 x^{-1/5} (1-x)^{-1/2} dx$  as Beta function. 1.25

$\int_0^1 x^{-1/5} (1-x)^{-1/2} dx$  को बीटा फंक्शन के रूप में परिभाषित कीजिए।

- (d) Determine the radius of convergence of

$$\sum_{m=0}^{\infty} (2m-1)! x^m. \quad 1.25$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} (2m-1)! x^m$$

के अभिसरण की त्रिज्या का निर्धारण कीजिए।

- (e) Define finite Fourier sine and cosine transform. 1.75.

परिमित फूरियर साइन और कोसाइन ट्रांसफॉर्म को परिभाषित कीजिए।