S.C.No.—M/19/2001212

B. A. EXAMINATION, May 2019

(Second Semester)

MATHEMATICS

Batch 2017/2018

Main/Re-appear

Number Theory and Trigonometry

ıe : 3 *Hours*] [*Maximum Marks* : 27

te : Attempt *Five* questions in all, selecting *one* question from each Section. Q. No. **9** is **compulsory.**

प्रत्येक खण्ड से **एक** प्रश्न चुनते हुए, कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । प्रश्न क्रमांक **9** अनिवार्य है ।

https://www.cbluonline.com

Section I

खण्ड I

1. (a) Prove that the product of any r consecutive integers is divisible by $r!$. 2.5

सिद्ध कीजिए कि किसी r निरंतर पूर्णांक का गुणनफल $r!$ द्वारा विभाज्य है ।

(b) Show that there are infinitely many primes of the form $4n+3$. 2

दर्शाइए कि फॉर्म $4n+3$ के बहुत से अभाज्य अनन्त हैं ।

2. (a) Find the least positive **uncongruent** solution of $7x \equiv 5 \pmod{256}$. **2.5**

$7x \equiv 5 \pmod{256}$ के कम-से-कम धनात्मक असंगत हल ज्ञात कीजिए ।

(b) State and prove Wilson's theorem. 2

विल्सन की प्रमेय का वर्णन कर सिद्ध कीजिए ।

https://www.cbluonline.com

Section II

खण्ड II

3. (a) Find all integers that give the remainder 1, 2, 3 when divided by 3, 4, 5 respectively. 2.5

वे सभी पूर्णांक ज्ञात कीजिए जो 1, 2, 3 शेष देते हैं, जब क्रमश: 3, 4, 5 द्वारा विभाजित होते हैं।

(b) If m and n are positive integers with $(m, n) = d$, then show that :

$$\phi(mn) = \frac{d\phi(m)\,\phi(n)}{\phi(d)}. \qquad 2$$

यदि m तथा n, $(m, n) = d$ के साथ धनात्मक पूर्णांक हैं, तो दर्शाइए कि :

$$\phi(mn) = \frac{d\phi(m)\,\phi(n)}{\phi(d)}$$

4. (a) State and prove Mobius inversion formula. 2.5

मोबियस व्युत्क्रम सूत्र सिद्ध कर वर्णन कीजिए।

https://www.cbluonline.com

(b) Evaluate :

(i) $\left(\frac{17}{19}\right)$

(ii) $\left(-\frac{23}{59}\right)$

मूल्यांकन कीजिए :

(i) $\left(\frac{17}{19}\right)$

(ii) $\left(-\frac{23}{59}\right)$

Section III

खण्ड III

5. (a) Show that the roots of the equation :

$$(x-8)^n = x^n$$

are

$$4\left(1 + i\cot\frac{r\pi}{n}\right),$$

where $r = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$. 2.5

https://www.cbluonline.com

दर्शाइए कि समीकरण :

$$(x-8)^n = x^n$$

के मूल

$$4\left(1 + i\cot\frac{r\pi}{n}\right)$$

है, जहाँ $r = 0, 1, 2, \ldots, (n-1)$ ।

(b) Express :

$$\cos^6\theta \sin^4\theta$$

in a series of cosines of multiples of θ. 2

θ के गुणांकों के कोसाइन की श्रेणियों में :

$$\cos^6\theta \sin^4\theta$$

प्रदर्शित कीजिए ।

6. (a) If $z = x + iy$, where x and y are real, find the real and imaginary parts of $\frac{\cos z}{z+1}$. 2.5

https://www.cbluonline.com

यदि $z = x + iy$ है, तो जहाँ x तथा y वास्तविक हैं, तो $\frac{\cos z}{z+1}$ के वास्तविक तथा कल्पनात्मक भाग ज्ञात कीजिए ।

(b) Express the following in the form $A + iB$:

(i) $\cosh(x + 1y)$

(ii) $\cot(x + iy)$. 2

निम्नलिखित को $A + iB$ में प्रदर्शित कीजिए :

(i) $\cosh(x + 1y)$

(ii) $\cot(x + iy)$.

Section IV

खण्ड IV

7. (a) Resolve the following into real and imaginary parts :

(i) $\log(1 + e^{2\theta})$

(ii) $\log(\cos(x + iy))$. 2.5

https://www.cbluonline.com

निम्नलिखित को वास्तविक तथा कल्पनात्मक भागों में हल कीजिए :

(i) $\log (1 + e^{2\theta})$

(ii) $\log (\cos (x + iy))$.

(b) Show that :

(i) $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

(ii) $4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{70} + \tan^{-1}\frac{1}{99} = \frac{\pi}{4}$ 2

दर्शाइए कि :

(i) $\tan^{-1}\frac{1}{2} + \tan^{-1}\frac{1}{5} + \tan^{-1}\frac{1}{8} = \frac{\pi}{4}$

(ii) $4\tan^{-1}\frac{1}{5} - \tan^{-1}\frac{1}{70} + \tan^{-1}\frac{1}{99} = \frac{\pi}{4}$

8. (a) Sum to n terms the series : 2.5

$\sin^2 \alpha + \sin^2 2\alpha + \sin^2 3\alpha + ...$

श्रेणी :

$\sin^2 \alpha + \sin^2 2\alpha + \sin^2 3\alpha + ...$

का n पदों तक योग कीजिए ।

https://www.cbluonline.com

(b) Sum the infinity series :

$C\sin\alpha + \frac{1}{3}C^3 \sin 3\alpha + \frac{1}{5}C^5 \sin 5\alpha + ...$

अनन्त श्रेणी का योग कीजिए :

$C\sin\alpha + \frac{1}{3}C^3 \sin 3\alpha + \frac{1}{5}C^5 \sin 5\alpha + ...$

Section V

खण्ड V

9. (a) Find the LCM of integers 119, 272.

पूर्णांक 119, 272 का LCM ज्ञात कीजिए ।

(b) Find the remainder when 2^{48} is divided by 10^5.

जब 2^{48} को 10^5 से विभाजित किया जाए तो शेष ज्ञात कीजिए ।

(c) Evaluate $\mu(130)$.

$\mu(130)$ का मूल्यांकन कीजिए ।

(d) Find the general value of $\log(-5)$.

$\log(-5)$ का सामान्य मान ज्ञात कीजिए ।

https://www.cbluonline.com

(e) If :

$$a = \cos 2\alpha + c \sin 2\alpha$$

and $b = \cos 2\beta + c \sin 2\beta$

then prove that :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 2 \cos (\alpha - \beta)$$

यदि :

$$a = \cos 2\alpha + c \sin 2\alpha$$

and $b = \cos 2\beta + c \sin 2\beta$

तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\sqrt{\frac{a}{b}} + \sqrt{\frac{b}{a}} = 2 \cos (\alpha - \beta)$$

(f) Prove that :

$$(-c)^{-c} = e^{(4x-1)\pi/2}.$$ 1.5×6=9

सिद्ध कीजिए कि :

$$(-c)^{-c} = e^{(4x-1)\pi/2}.$$

https://www.cbluonline.com