

(UG6)

Roll No.

S.C.No.—M/22/2001113

B. A. EXAMINATION, 2022

(First Semester)

(Re-appear)

MATHEMATICS

Calculus

Time : 3 Hours

Maximum Marks : 27

Note : Attempt *Five* questions in all. All questions carry equal marks.

कुल पाँच प्रश्नों के उत्तर दीजिए । सभी प्रश्नों के अंक समान हैं ।

Section I

खण्ड I

1. (a) Prove that $f(x) = |x|$ is continuous but not derivable at $x = 0$.

सिद्ध कीजिए कि $f(x) = |x|$ सतत है लेकिन $x = 0$ पर व्युत्पत्ति विषयक नहीं है ।

(M22-5-19/6) H-M/22/2001113(UG6)(TR)

P.T.O.

<https://www.cbluonline.com>

(b) If $y = e^{a \sin^{-1} x}$, prove that :

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1}$$

$$- (n^2 + a^2)y_n = 0. \quad 5.4$$

यदि $y = e^{a \sin^{-1} x}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि :

$$(1-x^2)y_{n+2} - (2n+1)xy_{n+1}$$

$$- (n^2 + a^2)y_n = 0.$$

2. (a) State and prove Taylor's theorem with Lagrange's form of remainder after ' n ' terms.

' n ' पदों के बाद लैग्रान्जे के शेषफल के रूप के साथ टेलर की प्रमेय को सिद्ध कर वर्णन कीजिए ।

(b) If $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 11$, find the

value of $f\left(\frac{9}{10}\right)$ with the help of Taylor's

series for $f(x+h)$. 5.4

H-M/22/2001113(UG6)(TR)

2

<https://www.cbluonline.com>

यदि $f(x) = x^3 + 2x^2 - 5x + 11$ हो, तो $f(x+h)$ के लिए टेलर श्रेणी की सहायता से $f\left(\frac{9}{10}\right)$ का मान ज्ञात कीजिए ।

Section II

खण्ड II

3. (a) Find the asymptotes of the curve :

$$x^2y - xy^2 + xy + y^2 + x - y = 0$$

and show that they cut the curve in three points on the straight line $x + y = 0$.

वक्र $x^2y - xy^2 + xy + y^2 + x - y = 0$ की स्पर्शोन्मुखी ज्ञात कीजिए तथा दर्शाइए कि वे सरल रेखा $x + y = 0$ पर तीन बिन्दुओं में वक्र को काटते हैं ।

- (b) Find the radius of curvature for the curve

$$r^n = a^n \cos n\theta. \quad 5.4$$

वक्र $r^n = a^n \cos n\theta$ के लिए वक्रता की त्रिज्या ज्ञात कीजिए ।

4. (a) The tangents at two points P, Q on the cycloid $x = a(\theta + \sin \theta) : y = a(1 - \cos \theta)$ are at right angles. Show that if ρ_1, ρ_2 are the radii of curvature at these points then $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 16a^2$.

चक्रज $x = a(\theta + \sin \theta) : y = a(1 - \cos \theta)$ पर दो बिन्दु P, Q पर समकोण पर स्पर्श रेखाएँ हैं । दर्शाइए कि यदि ρ_1, ρ_2 इन बिन्दुओं पर वक्रता की त्रिज्याएँ हैं, तो $\rho_1^2 + \rho_2^2 = 16a^2$ ।

- (b) Show that :

$$y^5 - ay^3x - ay^2x + a^2x^2 = 0$$

has a point of Oscul-inflexion at the origin. 5.4

दर्शाइए कि उत्पत्ति पर :

$$y^5 - ay^3x - ay^2x + a^2x^2 = 0$$

में ओस्कल-मोड़ बिन्दु हैं ।

Section III

खण्ड III

5. (a) Trace the curve :

$$x^2(x^2 + y^2) = a^2(x^2 - y^2).$$

वक्र $x^2(x^2 + y^2) = a^2(x^2 - y^2)$ ट्रेस कीजिए ।

- (b) Evaluate :

$$\int_0^{\pi} \sin^4 x \cdot \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{(1 + \cos x)^2} dx. \quad 5.4$$

मूल्यांकन कीजिए :

$$\int_0^{\pi} \sin^4 x \cdot \frac{\sqrt{1 - \cos x}}{(1 + \cos x)^2} dx.$$

6. (a) Find the intrinsic equation of the cardioid
 $r = a(1 - \cos \theta)$.

कार्डियोड $r = a(1 - \cos \theta)$ का आन्तरिक समीकरण ज्ञात कीजिए ।

- (b) If $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta d\theta$, where n is a positive integer; prove that
 $n(I_{n-1} + I_{n+1}) = 1$. 5.4

यदि $I_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n \theta d\theta$, जहाँ n एक धनात्मक पूर्णांक है, सिद्ध कीजिए कि $n(I_{n-1} + I_{n+1}) = 1$ ।

Section IV

खण्ड IV

7. (a) Find the area common to the circle
 $x^2 + y^2 = 4$ and the ellipse $x^2 + 4y^2 = 9$.
वृत्त $x^2 + y^2 = 4$ तथा दीर्घवृत्त $x^2 + 4y^2 = 9$ के लिए सामान्य क्षेत्र ज्ञात कीजिए ।
- (b) Find the area of a loop of the curve
 $r = a \cos 2\theta$ and hence find the total area of the curve. 5.4

वक्र $r = a \cos 2\theta$ के लूप का क्षेत्र ज्ञात कीजिए तथा वक्र का कुल क्षेत्र ज्ञात कीजिए ।

8. (a) Find the volume of the solid generated by revolving the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ about the x -axis.

x -अक्ष के परितः दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के परिक्रमण द्वारा उत्पन्न ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए ।

- (b) Find the surface area of the solid generated by revolving one arc of the curve $x = a(\theta - \sin \theta)$; $y = a(1 - \cos \theta)$ about x -axis. **5.4**

x -अक्ष के परितः वक्र $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ के एक चाप परिक्रमण द्वारा उत्पन्न ठोस का सतह क्षेत्र ज्ञात कीजिए ।

Section V

खण्ड V

9. (a) Evaluate $\int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta d\theta$. **0.9**

मूल्यांकन कीजिए $\int_0^{\pi/2} \sin^6 \theta d\theta$ ।

- (b) Define Asymptotes. **0.9**

स्पर्शोन्मुखी को परिभाषित कीजिए ।

- (c) If $y = ae^{mx} + be^{-mx}$, prove that $y_2 - m^2 y = 0$. **0.9**

यदि $y = ae^{mx} + be^{-mx}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $y_2 - m^2 y = 0$ ।

- (d) Discuss the nature of the origin for the curve $y^3 = x^3 + ax^2$. **0.9**

वक्र $y^3 = x^3 + ax^2$ के लिए उत्पत्ति की प्रकृति का वर्णन कीजिए ।

- (e) Define Node and Cusp. **0.9**
Node और Cusp की परिभाषा दीजिए ।

- (f) Find ρ , if $s = \log(\sec \psi + \tan \psi)$. **0.9**

यदि ρ है, तो $s = \log(\sec \psi + \tan \psi)$ ज्ञात कीजिए ।